fila **A**

Verifica scritta di matematica V F - 21 Marzo 2011

Svolgere a scelta 4 dei seguenti problemi:

1. Date le due curve di equazione $y = x^2$ e $xy = k$, determinare i valori di k affinché le due curve siano perpendicolari (siano, cioè, perpendicolari le loro tangenti nel punto comune) e tracciarne il grafico.

2. Si considerino le funzioni $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo $a \in \mathbb{R}$ e se ne tracci il grafico per $a = 1$ e $a = -1$. Si determini il valore di a per il quale le due funzioni sono tra loro tangenti. Si usi quindi tale risultato per discutere le soluzioni dell'equazione $\log x - ax^2 = 0$ al variare di a.

3. Data la curva
$$y = \frac{ax^2 + bx - 1}{cx + d} ,$$
si determinino i parametri a, b, c e d affinché la curva abbia come asintoti $x = -1$ e $y = 2x + 2$ e nel punto di ascissa $x = 1$ sia tangente a una retta parallela a $y = 3x - 2$.

4. Dimostrare che la curva $y = a \sin x + b \cos^2 x$ ha infiniti punti di tangenza con le rette $y = a$ e $y = -a$. Determinare inoltre i valori di a e b affinché tale curva in $P(\pi/6; 2)$ sia tangente a una retta inclinata di $\pi/3$ rispetto al'asse delle x.

5. La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-1, 4]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]-1, 4[$. Si sa che $f(4) = 1$ e inoltre $1 \leq f'(x) \leq 2$ per ogni x dell'intervallo $]-1, 4[$. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $-9 \leq f(-1) \leq -4$.

6. Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro $\overline{AB} = 2$, si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ. Sia quindi P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH. Definita
$$f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)} ,$$
si studi dove $f(x)$ è crescente e dove decrescente.

7. Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita nell'intervallo $I = [0, 5]$, si sa che
$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$$
$\forall \alpha \in I$ e che $f(x_0) = 3$ è il valore massimo che può assumere la funzione in I. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f'(x_0) = 0$. Fornire un'esauriente spiegazione della risposta e mostrare un esempio di una funzione che abbia tale comportamento.

8. Si consideri la funzione reale $f_m(x)$, di variabile reale x tale che:
$$f_m(x) = \frac{x^2}{|x - 2m| + m} ,$$
dove m è un parametro reale non nullo. Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione. Indicata con C_1 la curva rappresentativa della funzione $f(x)$ corrispondente ad $m = 1$ determinare le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto A di ascissa 2.

fila **B**

Verifica scritta di matematica V F - 21 Marzo 2011

Svolgere a scelta 4 dei seguenti problemi:

1. Date le due parabole $y = 3x^2$ e $y = -x^2 + k$, determinare il valore di k affinché le due curve siano perpendicolari (siano, cioè, perpendicolari le loro tangenti nel punto comune).

2. Si considerino le funzioni $f(x) = bx^2$ e $g(x) = \log x$, essendo $a \in \mathbb{R}$ e se ne tracci il grafico per $b = 1$ e $b = -1$. Si determini il valore di a per il quale le due funzioni sono tra loro tangenti. Si usi quindi tale risultato per discutere le soluzioni dell'equazione $bx^2 - \log x = 0$ al variare di b.

3. Data la curva
$$y = \frac{ax^2 + bx - 1}{cx + d} ,$$
si determinino i parametri a, b, c e d affinché la curva abbia come asintoti $x = -2$ e $y = 3x$ e nel punto di ascissa $x = 1$ sia tangente a una retta parallela a $y = 2x - 5$.

4. Dimostrare che la curva $y = a \cos x + b \sin^2 x$ ha infiniti punti di tangenza con le rette $y = a$ e $y = -a$. Determinare inoltre i valori di a e b affinché tale curva in $P(\pi/3; 2)$ sia tangente a una retta inclinata di $\pi/3$ rispetto al'asse delle x.

5. La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[2, 4]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]2, 4[$. Si sa che $f(2) = 1$ e inoltre $0 \leq f'(x) \leq 2$ per ogni x dell'intervallo $]2, 4[$. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \leq f(4) \leq 5$.

6. Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro $\overline{AB} = 2$, si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ. Sia quindi P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH. Definita
$$f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)} ,$$
si studi dove $f(x)$ è crescente e dove decrescente.

7. Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita nell'intervallo $I = [0, 5]$, si sa che
$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$$
$\forall \alpha \in I$ e che $f(x_0) = -1$ è il valore minimo che può assumere la funzione in I. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f'(x_0) = 0$. Fornire un'esauriente spiegazione della risposta e mostrare un esempio di una funzione che abbia tale comportamento.

8. Si consideri la funzione reale $f_m(x)$, di variabile reale x tale che:
$$f_m(x) = \frac{x^2}{|x - m| + 2m} ,$$
dove m è un parametro reale non nullo. Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione. Indicata con C_1 la curva rappresentativa della funzione $f(x)$ corrispondente ad $m = 1$ determinare le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto A di ascissa 1.