

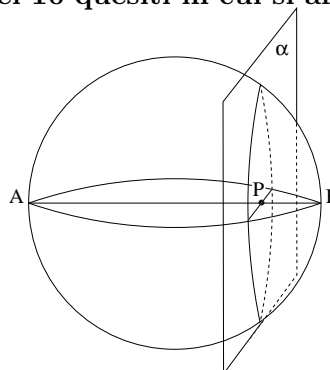


Liceo Scientifico Rodolico
SIMULAZIONE ESAME DI STATO - 23 Maggio 2011
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario

PROBLEMA 1

Considerata una sfera di diametro $\overline{AB} = 2$, per un punto P di tale diametro si conduca il piano α perpendicolare a esso e si ponga uguale a x la lunghezza di AP .



1. Si calcoli in funzione di x la differenza $d(x)$ fra il volume del cono avente altezza \overline{AP} e base il cerchio sezione di α con la sfera e il volume del segmento sferico avente la medesima base e altezza \overline{PB} .

Si ricorda che il volume del segmento sferico è $V = \pi h^2(r - \frac{h}{3})$, dove r è il raggio della sfera e h l'altezza del segmento sferico.

2. Controllato che risulta:

$$d(x) = \frac{\pi}{3}(2-x)(2x^2 - x - 2)$$

si studi la funzione $d(x)$, disegnandone il grafico prescindendo dai limiti geometrici sulla variabile x e tracciando l'equazione della retta t tangente a $d(x)$ nel suo punto di flesso F .

3. Si utilizzi questo grafico per calcolare quante soluzioni ammette l'equazione $d(x) = k$ per $x \in [0, 2]$ al variare di k nel campo dei reali.
4. Determinare la parabola γ che interseca il grafico di funzione nei punti di ascissa $x_A = 1$ e $x_B = 2$, tale che l'area della regione piana delimitata da $y = d(x)$ e da γ sia $\mathcal{A} = \frac{\pi}{4}$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \log(e+x) & -e < x < 0 \\ (x+k)e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

essendo k un parametro reale.

1. Determinare k in modo che la curva γ di equazione $y = f(x)$ risulti continua e verificato che tale valore è $k = 1$ studiare la funzione $f(x)$ tracciandone il grafico in un piano cartesiano xOy .
2. Definito l'intervallo $I = [-\frac{\pi}{2011}, \frac{\pi}{2011}]$, determinare se $f(x)$ in I verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange e in caso affermativo calcolare l'ascissa x_0 che soddisfa la tesi di tale teorema.
3. Dopo aver verificato che la funzione è invertibile $\forall x \geq 0$, motivando la risposta, stabilire se la funzione inversa di tale restrizione è derivabile in tutto il suo dominio.
4. Detto A il punto di intersezione della curva $y = f(x)$ con l'asse delle ordinate, determinare l'area di piano delimitata da $y = f(x)$, dal suo asintoto verticale e dalla retta orizzontale passante per A .



Liceo Scientifico Rodolico
SIMULAZIONE ESAME DI STATO - 23 Maggio 2011
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Considerata la funzione

$$f(x) = \left(\frac{x+k}{x-k} \right)^x$$

essendo k è un parametro reale non nullo, determinare il valore di k in modo che $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$.

2. Fra tutte le primitive di $f(x) = 3 \cos^3 x$ trovare quella il cui grafico passa per il punto $(0, 5)$.

3. Determinare al variare del parametro reale k il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$2x^3 - 3kx^2 + 2 - k = 0$$

4. La funzione data è continua e derivabile per $x = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^3} & \text{per } x \neq 0 \\ -\frac{1}{6} & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

5. Si consideri la funzione composta $f(x) = h[g(x)]$. Si sa che $h(t)$ è monotona decrescente e che h e g sono derivabili nel loro dominio. Dimostrare che i punti di massimo e di minimo della $g(x)$ sono rispettivamente i punti di minimo e di massimo della $f(x)$.

6. Verificare che la funzione $\frac{1 - e^{1-x}}{1 + e^{1-x}}$ è invertibile e detta g la funzione inversa calcolare $g'(0)$.

7. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4}$.

8. Quale valore si deve dare al parametro a affinché il segmento parabolico delimitato dalla parabola $x = ay - y^2$ e dall'asse y abbia area $\frac{32}{3}$?

9. Determinare la base e l'altezza di un triangolo isoscele, sapendo che la loro somma è s e che il triangolo è inscritto in un cerchio di raggio r .

10. Verificare, facendo uso della definizione, che $f(x) = \sin(\pi x)$ è periodica di periodo 2.

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.